МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ, НАУКИ И ПО ДЕЛАМ МОЛОДЕЖИ КБР
ДВОРЕЦ ТВОРЧЕСТВА ДЕТЕЙ И МОЛОДЕЖИ
Отдел научно-исследовательской работы

Утверждаю
Директор ДТДМ
________ К.А. Калмыкова

Рассмотрено
Методическим советом ДТДМ
Протокол № 4 п/п 2
от «13» января 2022 г.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
«ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ ФОРМУЛЫ»

(для педагогов дополнительного образования и обучающихся)

Составитель:
педагог дополнительного
образования **Кудаев А.Ю.**

Нальчик – 2022

Пояснительная записка

Обучение детей математике на современном этапе приобретает все большее значение. Это объясняется, прежде всего, бурным развитием математической науки и проникновением ее во многие области знаний.

Повышение уровня творческой активности, автоматизация производства, моделирования на электронно-вычислительных машинах и многое другое предполагает наличие у специалистов большинства современных профессий умения четко и последовательно анализировать изучаемые процессы. Поэтому обучение математике направлено прежде всего на воспитание у детей привычки полноценной логической аргументации. Развитию логического мышления в наибольшей мере способствует изучение математики.

Чтобы сформировать у детей математические представления, развить логическое мышление и при этом заставить детей самостоятельно мыслить, можно использовать логико-математические формулы, подборка которых мной представлена в данном методическом пособии.

Материал пособия ориентирован на обучающих в возрасте от 12 до 18 лет, в зависимости от индивидуального развития ребенка. Для удобства он представлен в виде сгруппированных по темам формул, таблиц и фигур с описанием их особенностей, и свойств.

Представленный материал можно применять при проведении непосредственно образовательной и самообразовательной деятельности в системе дополнительного образования в объединениях с математическим уклоном, а также для целенаправленной работы по выбранному направлению обучения в профильных объединениях, в частности, объединениях «Избранные вопросы математики», «Решение разноуровневых задач по математике» и «Математические ступени».

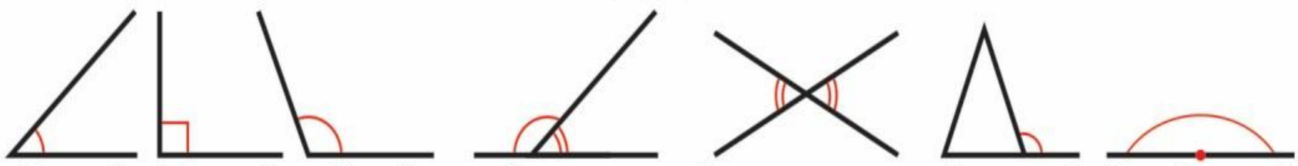
Целью настоящего пособия является оказание помощи в освоении геометрии обучающимися школьного возраста на уровне среднего и старшего звеньев.

Настоящее пособие может оказать помощь педагогу дополнительного образования в подготовке к практическим занятиям, а также обучающим при самостоятельном изучении отдельных тем и при подготовке к математическим турнирам и олимпиадам.

Данное пособие направлено на оказание существенной помощи при самоподготовке обучающихся к переводным и выпускным экзаменам в школах.

ГЕОМЕТРИЯ В КАРТИНКАХ

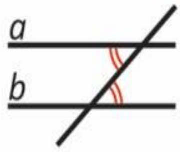
УГЛЫ



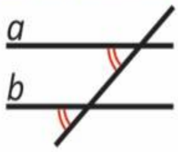
Острый	Прямой	Тупой	Смежные	Вертикальные	Внешний	Развёрнутый
меньше 90°	*равен 90°*	*больше 90°*	*в сумме образуют угол 180°*	*вертикальные углы равны*		*равен 180°*

Признаки параллельности прямых

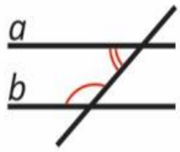
1. Внутренние накрест лежащие углы равны



2. Соответственные углы равны



3. Внутренние односторонние углы составляют в сумме 180°



Сумма углов многоугольников

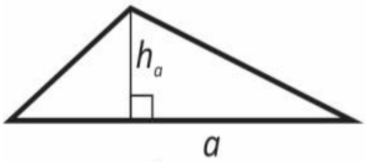
Сумма углов треугольника = 180°

Сумма углов четырёхугольника = 360°

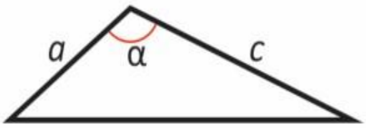
Сумма углов пятиугольника = 540°

Сумма углов шестиугольника = 720°

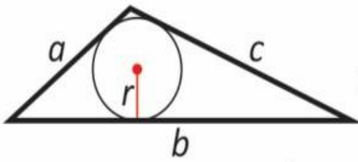
ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\alpha$$

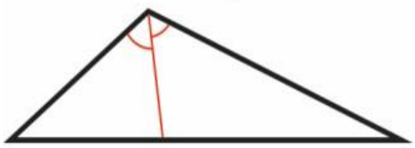


$$S = p \cdot r, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Прочие соотношения

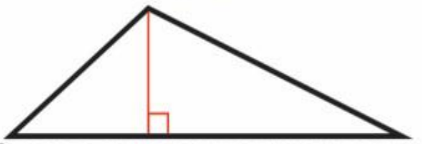
$$r = \frac{2 \cdot S}{a+b+c}$$

Биссектриса



Биссектриса – это луч, с началом в вершине угла, делящий угол на два равных угла

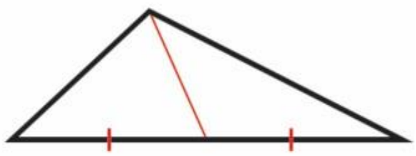
Высота треугольника



Высота в остроугольном треугольнике

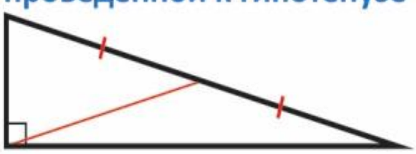
Высота треугольника – это перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону

Медиана



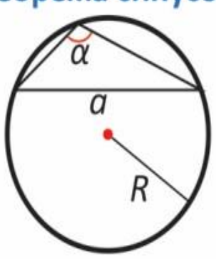
Медиана – это луч, с началом в вершине угла, делящий противоположную сторону пополам

Теорема о медиане, проведённой к гипотенузе



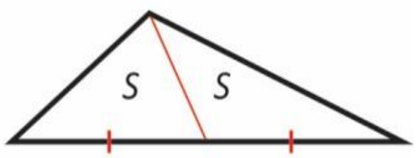
Медиана, проведённая к гипотенузе равна половине гипотенузы

Теорема синусов



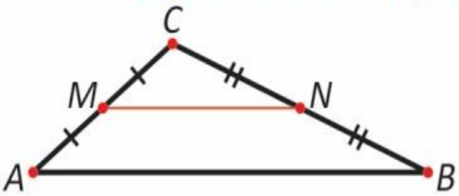
$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

Свойство медианы



Медиана разбивает треугольник на два равновеликих (на два треугольника с равными площадями)

Средняя линия треугольника



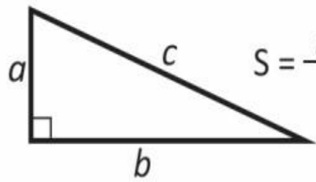
1. $MN \parallel AB$
2. $MN = \frac{1}{2} \cdot AB$

Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Признаки равенства треугольников

1. По двум сторонам и углу между ними.
2. По стороне и двум прилежащим к ней углам.
3. По трём сторонам.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

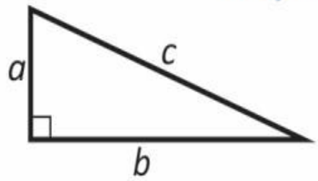


$S = \frac{a \cdot b}{2}$

Прочие соотношения

$r = \frac{a \cdot b}{a+b+c}$ $R = \frac{c}{2}$

Теорема Пифагора



Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

$c^2 = a^2 + b^2$

Синус

$\sin\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

Косинус

$\cos\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

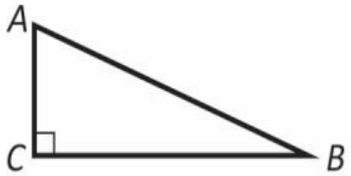
Тангенс

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Котангенс

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Свойство острых углов



В прямоугольном треугольнике, синус одного острого угла равен косинусу другого острого угла

$\sin A = \cos B$

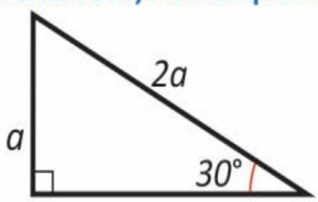
$\cos A = \sin B$

Аналогично тангенс одного острого угла равен котангенсу другого острого угла

$\mathrm{tg}\,A = \mathrm{ctg}\,B$

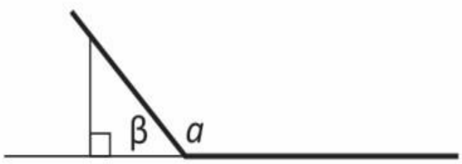
$\mathrm{ctg}\,A = \mathrm{tg}\,B$

Теорема о катете, лежащем против 30°



Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы.

Свойство смежных углов



$\sin\alpha = \sin\beta$

$\cos\alpha = -\cos\beta$

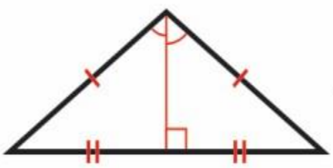
$\mathrm{tg}\,\alpha = -\mathrm{tg}\,\beta$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = -\mathrm{ctg}\,\beta$

Чтобы найти sin или cos, tg или ctg, нужно найти соответствующую функцию для смежного угла.

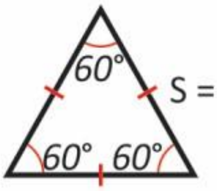
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Теорема о медиане, биссектрисе, высоте



В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию является ещё и медианой, и биссектрисой

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК



$$S = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$$

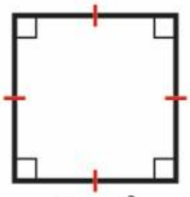
Прочие соотношения

$$R = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{3} \qquad h = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{6} \qquad h = 1{,}5 \cdot R$$

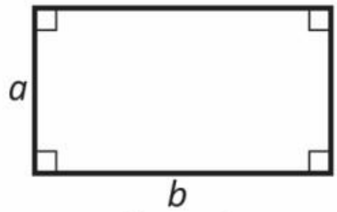
$$h = 3 \cdot r$$

КВАДРАТ



$S = a^2$

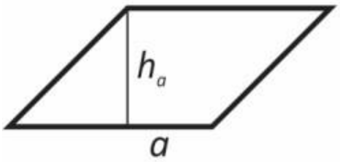
ПРЯМОУГОЛЬНИК



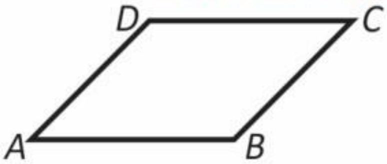
$S = a \cdot b$

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

$S = a \cdot h_a$



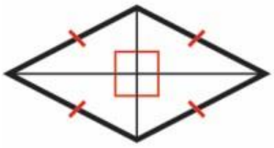
Теорема о сумме углов у любой стороны

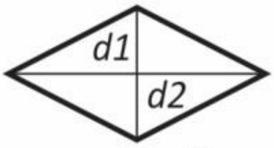


В параллелограмме сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180°.

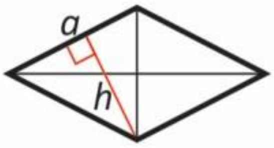
$\angle A + \angle B = 180°$
$\angle B + \angle C = 180°$
$\angle C + \angle D = 180°$
$\angle D + \angle A = 180°$

РОМБ

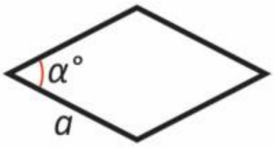




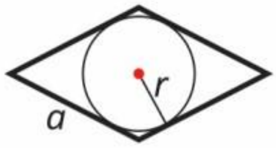
$$S = \frac{d1 \cdot d2}{2}$$



$S = a \cdot h$

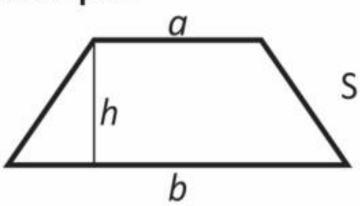


$S = a^2 \cdot \sin\alpha$



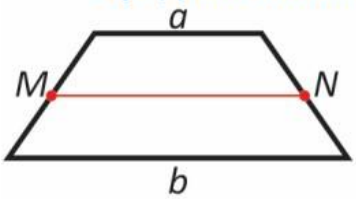
$S = 2 \cdot a \cdot r$

ТРАПЕЦИЯ



$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Средняя линия трапеции

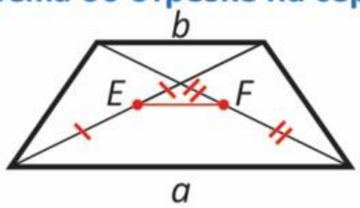


1. $MN \parallel a \parallel b$

2. $MN = \dfrac{a + b}{2}$

Средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

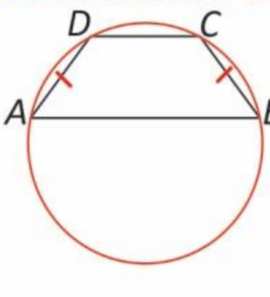
Теорема об отрезке на серединах диагоналей



$$EF = \frac{a - b}{2}$$

Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции равен полуразности оснований.

Теорема об описанной окружности



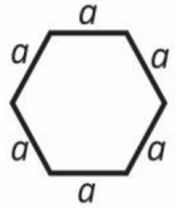
Если трапецию можно вписать в окружность, то эта трапеция – равнобедренная.

Теорема о перпендикулярных диагоналях

$$h = \frac{a + b}{2}$$

Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота равна полусумме оснований.

ШЕСТИУГОЛЬНИК

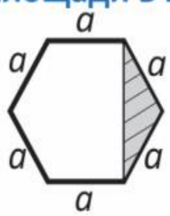


$S = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2}$

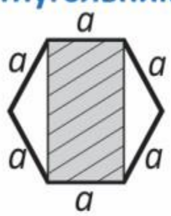
Прочие соотношения

$R = a;\ r = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$

Площади в шестиугольнике



$S_{ТР} = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$



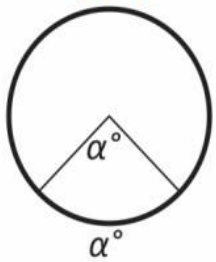
$S_{ПР} = \sqrt{3} \cdot a^2$

Диагонали в шестиугольнике

ОКРУЖНОСТЬ

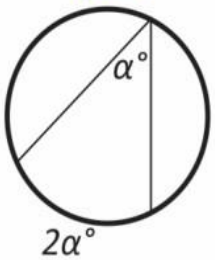
Длина окружности $C = 2 \cdot \pi \cdot R$ **Площадь круга** $S = \pi \cdot R^2$

Центральный угол



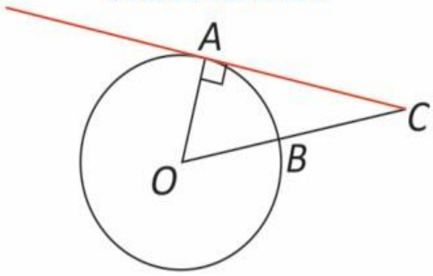
Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается.

Вписанный угол



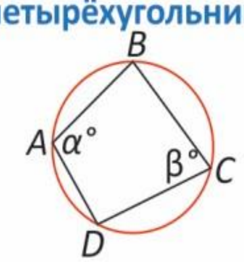
Вписанный угол равен половине градусной мере дуги, на которую он опирается.

Теорема о касательной



Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

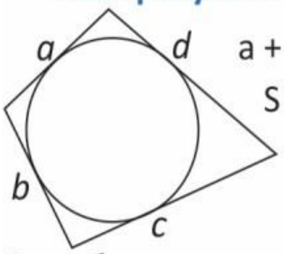
Теорема о вписанном четырёхугольнике



$\alpha + \beta = 180°$

В любом вписанном в окружность четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Теорема об описанном четырёхугольнике



$a + c = b + d$

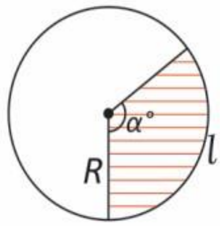
$S = p \cdot r$, где p – полупериметр

В любом описанном окружностью четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Теорема об отрезках касательных

Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

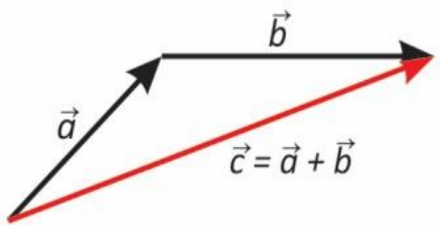
Круговой сектор



$$S_{СЕКТОРА} = \frac{l_{СЕКТОРА} \cdot R}{2}$$

$$l_{СЕКТОРА} = \frac{2 \cdot S_{СЕКТОРА}}{R}$$

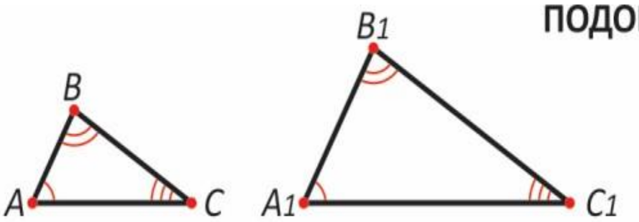
ВЕКТОРЫ



Сложение векторов

Даны два вектора. К концу первого пристраиваем начало второго. Теперь соединяем начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

ПОДОБИЕ



$\angle A = \angle A_1, \ \angle B = \angle B_1, \ \angle C = \angle C_1$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$$

Признаки подобия треугольников

1. По двум равным углам.

2. По двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

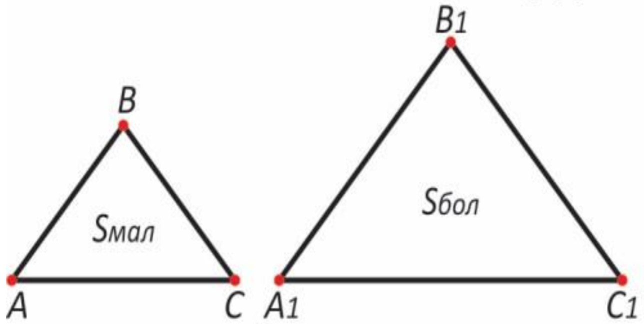
3. По трём пропорциональным сторонам.

Отношения в подобных треугольниках

Отношение периметров, биссектрис, медиан, высот и серединных перпендикуляров равно коэффициенту подобия.

(периметры) $\frac{P_{бол}}{P_{мал}} = k$ | (медианы) $\frac{m_{бол}}{m_{мал}} = k$ | (биссектрисы) $\frac{l_{бол}}{l_{мал}} = k$ | (высоты) $\frac{h_{бол}}{h_{мал}} = k$ | (сер. перпендикуляр) $\frac{h_{сер.бол}}{h_{сер.мал}} = k$

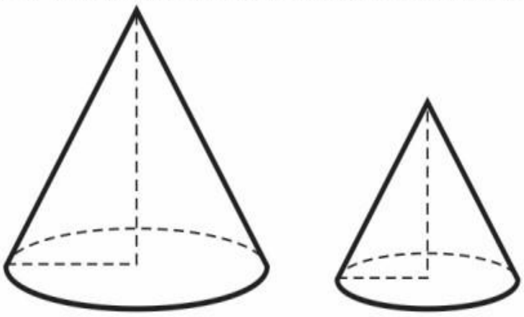
ТЕОРЕМА ОБ ОТНОШЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ



$$\frac{S_{бол}}{S_{мал}} = k^2$$

Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

ТЕОРЕМА ОБ ОТНОШЕНИИ ОБЪЁМОВ



$$\frac{V_{бол}}{V_{мал}} = k^3$$

Отношение объёмов подобных фигур равно кубу коэффициента подобия.

ПЛАНИМЕТРИЯ В ФОРМУЛАХ

МНОГОУГОЛЬНИКИ

Треугольники

Произвольный

(a, b, c – стороны, h_a – высота, опущенная на сторону a, p – полупериметр, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности)

Периметр $P = a + b + c$ | $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр

Площадь $S = \frac{1}{2} \cdot ah_a = \frac{1}{2} \cdot bh_b = \frac{1}{2} \cdot ch_c$ | $S = \frac{1}{2} \cdot ab \sin C$ | $S = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$ | $S = \frac{abc}{4R}$

Высота $h_a = b \sin C$ | $h_a = \frac{2S}{a}$ ***Радиус вписанной окружности*** $r = \frac{2S}{a+b+c}$ | $r = \frac{S}{p}$

Радиус описанной окружности $R = \frac{abc}{4S}$ | $R = \frac{a}{2 \sin A}$ | $R = \frac{b}{2 \sin B}$ | $R = \frac{c}{2 \sin C}$

Дополнительные формулы $MN = \frac{1}{2} a$ – средняя линия, параллельная стороне a

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ – теорема косинусов

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ – теорема синусов

Правильный (равносторонний)

Периметр $P = 3a$ — ***Радиус вписанной окружности*** $r = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}$

Площадь $S = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$ — ***Радиус описанной окружности*** $R = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}$

Высота $h = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}$ — ***Дополнительные формулы*** $R = 2r = \frac{2}{3}h$

Равнобедренный (a – основание, b – боковая сторона)

Периметр $P = a + 2b$ — ***Высота*** $h_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$

Площадь $S = \frac{1}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2}$ — ***Дополнительные формулы*** $h_b = a \sin B = a \sin C$

Прямоугольный

(a, b – катеты, c – гипотенуза, hc – высота, проведенная к гипотенузе, ac, bc – проекции катетов на гипотенузу)

Периметр $P = a + b + c$ — ***Радиус вписанной окружности*** $r = \frac{a + b - c}{2}$

Площадь $S = \frac{1}{2}ab$ | $S = \frac{1}{2}ch_c$ — ***Радиус описанной окружности*** $R = \frac{c}{2}$

Высота $h_c = \frac{ab}{c}$ | $h_c = \sqrt{a_c\cdot b_c}$

Дополнительные формулы $a^2+b^2=c^2$ – теорема Пифагора | $a = \sqrt{a_c\cdot c}$ | $b = \sqrt{b_c\cdot c}$

Четырёхугольники

Ромб

(a – сторона, h – высота, r – радиус вписанной окружности, α – острый угол ромба, d_1, d_2 – диагонали)

Периметр $P = 4a$ — ***Площадь*** $S = a^2\cdot\sin A$ | $S = a\cdot h$ | $S = \frac{1}{2}d_1\cdot d_2$

Высота $h = a\cdot\sin A$ | $h = 2\cdot r$ — ***Радиус вписанной окружности*** $r = \frac{h}{2}$ | $r = \frac{1}{2}a\cdot\sin\alpha$

Дополнительные формулы $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ | $d_1 = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$ | $d_2 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$

Трапеция

(a, b – основания, c, d – боковыестороны, h – высота, d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между диагоналями, MN – средняя линия)

Периметр $P = a + b + c + d$ — ***Высота*** $h = c\cdot\sin A$

Площадь $S = \frac{1}{2}(a + b)\cdot h$ | $S = MN\cdot h$ | $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Радиус вписанной окружности

В трапецию можно вписать окружность если $a + b = c + d$, тогда $r = \frac{h}{2}$

Радиус описанной окружности

Около р/б трапеции можно описать окружность.

Дополнительные формулы $MN = \frac{a + b}{2}$

Квадрат (правильный четырехугольник)

(a – сторона, d – диагональ)

Периметр $P = 4 \cdot a$ ***Радиус вписанной окружности*** $r = \frac{a}{2}$

Площадь $S = a^2$ | $S = \frac{1}{2} \cdot d^2$ ***Радиус описанной окружности*** $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ | $R = \frac{d}{2}$

Дополнительные формулы $d = a\sqrt{2}$

Прямоугольник

(a, b – стороны, d – диагональ, φ – угол между диагоналями)

Периметр $P = 2 \cdot (a + b)$ ***Радиус описанной окружности*** $R = \frac{d}{2}$ | $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

Площадь $S = a \cdot b$ | $S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$ ***Дополнительные формулы*** $a^2 + b^2 = d^2$

Параллелограмм

(a, b – стороны, h_a, h_b – высоты, d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между диагоналями)

Периметр $P = 2 \cdot (a + b)$ ***Площадь*** $S = a \cdot b \sin A$ | $S = ah_a = bh_b$ | $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$

Высота $h_a = b \cdot \sin A$ | $h_b = a \cdot \sin C$ | $h_a = \frac{S}{a}$ | $h_b = \frac{S}{b}$ ***Доп. формулы*** $d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$

Шестиугольник правильный

(a – сторона, $d_{\text{большая}}$, $d_{\text{меньшая}}$ – диагонали)

Периметр $P = 6 \cdot a$ ***Радиус вписанной окружности*** $r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$

Площадь $S = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$ ***Радиус описанной окружности*** $R = a$

Дополнительные формулы $d_{\text{бол}} = 2a$ | $d_{\text{мал}} = a\sqrt{3}$

ОКРУЖНОСТЬ и КРУГ

Окружность, круг

(R – радиус, d – диаметр, α – центральный угол, AB, CD – хорды, AB ∩ CD = M)

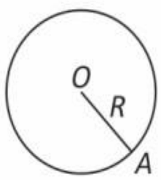
Длина окружности $C = 2\pi R$ | $C = \pi d$ ***Площадь круга*** $S = \pi R^2$ | $S = \frac{\pi d^2}{4}$

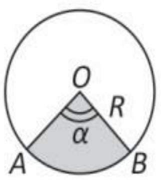
Длина дуги окружности $l_{\text{дуги}} = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ ***Площадь кругового сектора*** $S_{\text{кр.сек.}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$

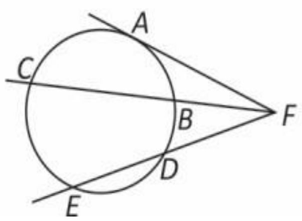
Касательная и секущие $FB \cdot FC = FD \cdot FE$ | $FA^2 = FB \cdot FC = FD \cdot FE$

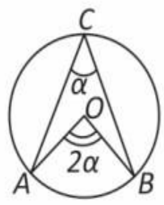
Вписанный и центральный углы $\angle AOB = 2\angle ACB$ | $\angle ACB = 90°$, если AOB – диаметр

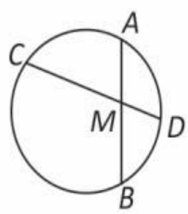
Дополнительные формулы $d = 2R$ | $AM \cdot MB = CM \cdot MD$





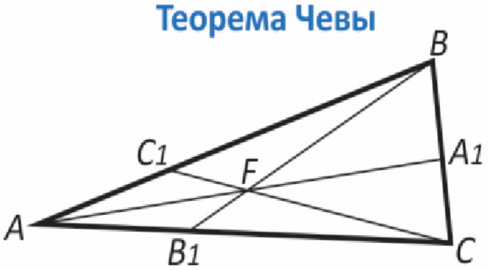






ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ТРЕУГОЛЬНИКЕ

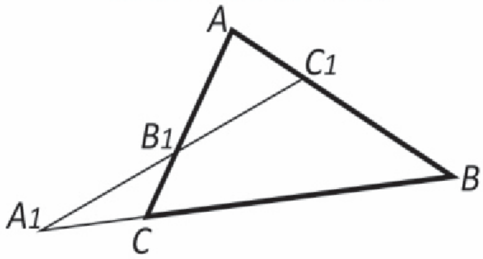
Теорема Чевы



Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

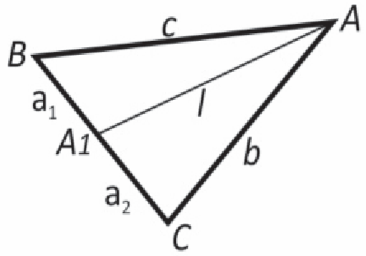
Теорема Менелая



Точки A_1, B_1, C_1 тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда:

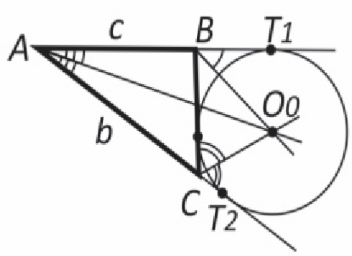
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1$$

Теорема Стюарта



$AA_1 = l$, тогда $\quad l^2 = \dfrac{b^2 \cdot a_1 + c^2 \cdot a_2}{a_1 + a_2} - a_1 \cdot a_2$

Центры вневписанных окружностей



$AT_1 = AT_2 = \frac{1}{2}(AB+BC+CA) = p$

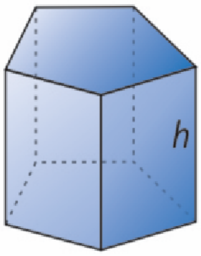
$BK = p - c$; $CK = p - b$

Центры вневписанных окружностей лежат в точках пересечения биссектрисы внутреннего и двух биссектрис внешних углов треугольника.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

МНОГОГРАННИКИ

Обозначения: a – сторона основания, h – высота многогранника, l – апофема (высота боковой грани пирамиды), $P\perp$ – периметр перпендикулярного сечения призмы, d – длина бокового ребра призмы, $S\perp$ – площадь перпендикулярного сечения призмы.



Призма

	Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
Произвольная призма	—	$S_{бок} = P\perp \cdot d$	$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$	$V = S_{осн} \cdot h$ $V = S\perp \cdot d$
Прямая призма	—	$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$	$S_{полн} = P_{осн} \cdot h + 2S_{осн}$	$V = S_{осн} \cdot h$
Правильная треугольная призма	$S_{осн} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	$S_{бок} = 3 \cdot a \cdot h$	$S_{полн} = 3 \cdot a \cdot h + \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h$
Правильная четырехугольная призма (прямоугольный параллелепипед)	$S_{осн} = a^2$	$S_{бок} = 4 \cdot a \cdot h$	$S_{полн} = 4 \cdot a \cdot h + 2 \cdot a^2$	$V = a^2 \cdot h$
Правильная шестиугольная призма	$S_{осн} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$S_{бок} = 6 \cdot a \cdot h$	$S_{полн} = 6 \cdot a \cdot h + 3 \cdot a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\qquad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Производная элементарной функции		Производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'(u)\cdot u'(x)$	
$(c)' = 0$	$(\operatorname{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2x}$	$(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$*	$(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$
$(x)' = 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$	$(\sin u)' = \cos u\cdot u'$	$(e^u)' = e^u\cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{tg}u)' = \frac{1}{\cos^2x}\cdot u'$	$(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(a^x)' = a^x\ln a$	$(\operatorname{ctg}u)' = -\frac{1}{\sin^2u}\cdot u'$	* $u = u(x)$
$(\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2x}$			

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. $(u+v)' = u' + v'$

2. $(Cu)' = C\cdot u'$

3. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

4. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

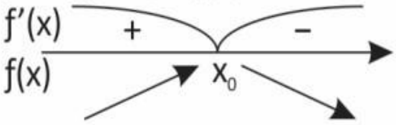
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x)$ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Физический смысл производной состоит в том, что производная от координаты по времени есть мгновенная скорость: $v(t) = s'(t)$

Если в точке x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка максимума функции $f(x)$.



Если в точке x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка минимума функции $f(x)$.

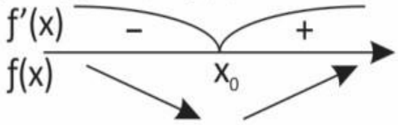


ГРАФИК ОБЫЧНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЁ ПРОИЗВОДНОЙ

График обычной функции $y = x^3 - 3x$

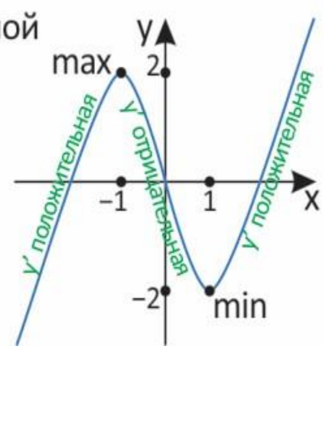
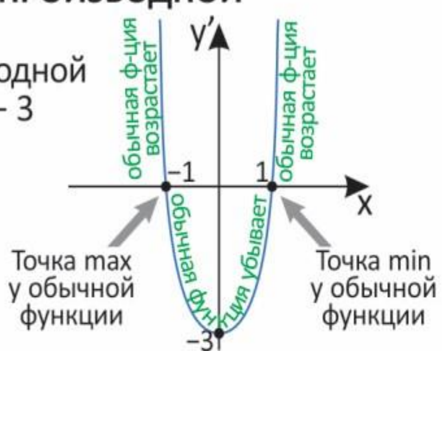
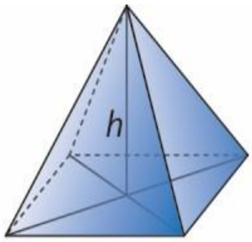


График производной $y' = 3x^2 - 3$



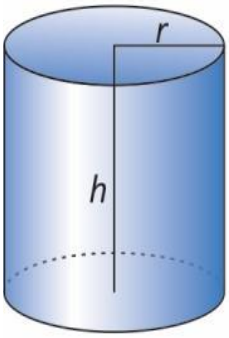


Пирамида

	Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
Произвольная пирамида	—	—	$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}$	$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$
Правильная треугольная пирамида	$S_{осн}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$	$S_{бок}=\frac{3\cdot a\cdot l}{2}$	$S_{полн}=\frac{3\cdot a\cdot l}{2}+\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$	$V=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{12}\cdot h$
Правильная четырехугольная пирамида	$S_{осн}=a^2$	$S_{бок}=2\cdot a\cdot l$	$S_{полн}=2\cdot a\cdot l+a^2$	$V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot h$
Правильная шестиугольная пирамида	$S_{осн}=\frac{3a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$	$S_{бок}=3\cdot a\cdot l$	$S_{полн}=3\cdot a\cdot l+\frac{3a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$	$V=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot h$

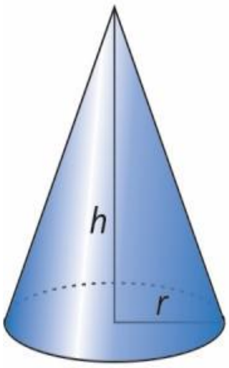
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Обозначения: r, R – радиусы оснований, h – высота, l – образующая



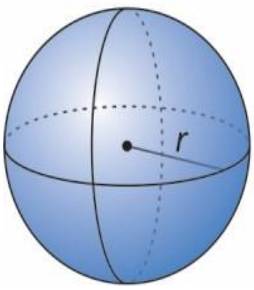
Цилиндр

Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
$S_{осн}=\pi r^2$	$S_{бок}=2\pi rh$	$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}$ $S_{полн}=2\pi rh+2\pi r^2$	$V=S_{осн}\cdot h$ $V=\pi r^2\cdot h$



Конус

Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
$S_{осн}=\pi r^2$	$S_{бок}=\pi rl$	$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}$ $S_{полн}=\pi rl+\pi r^2$	$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$ $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$
усечённый конус			
$S_{осн1}=\pi r^2$ $S_{осн2}=\pi R^2$	$S_{бок}=\pi\cdot(r+R)\cdot l$	$S_{полн}=\pi r^2+\pi R^2+\pi(r+R)l$	$V=\frac{1}{3}\pi(r^2+$ $+rR+R^2)\cdot h$



Шар

Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
—	—	$S_{пов}=4\pi r^2$	$V=\frac{4}{3}\cdot\pi r^3$

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

$=$	– равенство (равно)
$\neq$	– не равно
$\approx$	– приближительно равно
$a \vdots b$	– a делится без остатка на b
$a \mid b$	– a делит b (b делится на a)
$\forall$	– квантор всеобщности (для любого, для любых)
$\exists$	– квантор существования (существует)
$\nexists$	– квантор отрицания существования (не существует)
!	– единственность
$\cup$	– объединение
$\cap$	– пересечение
$\subset$	– подмножество
$\in$	– принадлежит
$\notin$	– не принадлежит
=>	– следование (следует)
<=>	– равносильность равносильно
$\varnothing$	– пустое множество
N	– множество натуральных чисел
Z	– множество целых чисел
Q	– множество рациональных чисел
R	– множество действительных чисел
C	– множество комплексных чисел
$<$	– сравнение «меньше, чем»
$>$	– сравнение «больше, чем»
$\leq$	– сравнение «меньше или равно, чем»
$\geq$	– сравнение «больше или равно, чем»
∞	– бесконечность
$\sum$	– сумма
$\prod$	– произведение
$[a; b]$	– отрезок числовой прямой (концы ему принадлежат)
$(a; b)$	– интервал числовой прямой концы ему не принадлежат
$[a; b)$	– полуинтервал числовой прямой
$f([a; b])$	– множество значений функции f на отрезке [a; b]
$D(f)$	– область определения функции f (x)
$E(f)$	– множество значений функции f (x)

Δy	– приращение, изменение y
$\lim f(n)$	– предел числовой функции f при n, стремящемся к ∞
$f'(x)$	– производная функции f(x) (df/dx)
$\int$	– интеграл
$\longrightarrow$	– стремится
$\log_b a$	– логарифм числа a по основанию b
$\sqrt{a}$	– арифметический квадратный корень из числа a, $a \geq 0$
%	– процент (сотая часть)
$\lvert a \rvert$	– модуль числа a (абсолютное значение)
[a]	– целая часть числа a
{a}	– дробная часть числа
$\uparrow\uparrow$	– сонаправленные векторы
$\uparrow\downarrow$	– противоположно направленные векторы
n!	– n-факториал $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1) \cdot n)$
НОД (m; n)	– наибольший общий делитель чисел m и n
НОК (m; n)	– наименьшее общее кратное чисел m и n
$\overline{abc}$	– десятичная запись числа ($\overline{abc} = 100a + 10b + c$)
const	– константа, постоянная величина
$\angle$	– угол
∟	– прямой угол
$\perp$	– перпендикулярность
	– параллельность
Δ ABC	– треугольник с вершинами A, B, C
п/у Δ	– прямоугольный треугольник
р/б Δ	– равнобедренный треугольник
р/с Δ	– равносторонний треугольник
$\smile$	– дуга окружности
$\sim$	– подобие
°	– градус
′	– минута
″	– секунда

Константы (постоянные)

π – число Пи
(≈3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164...)

e – основание натурального логарифма
(≈2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995...)

Используемая литература:

1. Генденштейн Л., Ершова А., Ершова А. Наглядный справочник по математике с примерами. – М.: изд. Илекса, 2019. – 192с.
2. Рурукин А., Гусева Н., Шкваева Е. Справочник по математике. – М.: изд. Вако, 2021. – 80 с.
3. Судавная О. Краткий справочник по математике. – СПб: изд. Питер СПб, 20218. – 320 с.
4. Белых С. Карманный справочник по математике. – М.: изд. Феникс, 2019. – 224 с.